IL LINGUAGGIO MATEMATICO

di Carlo Felice Manara - Mario Marchi

Il linguaggio della matematica

Si è soliti caratterizzare ogni disciplina per i suoi contenuti, per gli oggetti di cui si occupa, e si è poi anche soliti osservare che ogni disciplina ha, di conseguenza, un suo *proprio linguaggio*, che dipende ed è quasi il risultato della *natura* degli *oggetti* che studia e dei *metodi* utilizzati nella investigazione.

Vediamo quanto e come questa analisi è adattabile alla matematica. Bisognerebbe allora prima di tutto individuare i suoi contenuti: quali possono essere gli *oggetti di studio* della matematica? La domanda sembra a prima vista quasi banale e retorica: «la matematica, anzi — se vogliamo essere più precisi — l'aritmetica è la scienza dei numeri, la scienza della quantità», così si potrebbe rispondere, e ancora: «la geometria è la scienza dello spazio, la scienza della forma». Queste risposte, che sembrerebbero essere il naturale inizio di una corretta analisi sui contenuti propri della matematica, racchiudono invece nel loro interno il germe di un profondo travaglio che ci porterà alla fine, inaspettatamente, al risultato opposto a quello per il quale sembravano essere preordinate.

È, infatti, spontaneo chiedersi a questo punto: se la matematica studia i numeri, le quantità, lo spazio, le forme, ebbene, cerchiamo di dare una precisa nozione degli enti che siamo abituati ad individuare con questi termini verbali. Ci accorgiamo allora subito che, anche se ognuno dei vocaboli *numero, quantità, spazio, forma* (e con essi tanti analoghi e anche più tecnici come *insieme, proprietà, uguaglianza* ecc.) evoca in noi delle immagini mentali ben precise, essi sfuggono tuttavia ad una definizione univoca e autosufficiente. In altre parole, ogni definizione che noi volessimo dare di questi vocaboli sarebbe necessariamente fatta ricorrendo ad altri concetti, o ad altri termini che andrebbero a loro volta definiti, facendo ancora ricorso a nuovi concetti, fino ad un inevitabile circolo chiuso. D'altra parte, per individuare queste nozioni di cui la matematica si interessa, non è applicabile neppure la soluzione caratteristica delle scienze sperimentali, che consiste nell'ostensione fisica degli oggetti di studio, univocamente individuati attraverso opportuni e ben precisati esperimenti.

Siamo allora a questo punto: la matematica sembra avere come oggetto di studio dei contenuti ben precisi di cui noi siamo in grado di farci una idea per analogia o con immagini mentali fantastiche, ma che alla fine risultano invece sfuggire ad ogni tentativo di definizione precisa. È ovvio, a questo punto, che se non si riescono a definire in modo soddisfacente i contenuti della matematica, risulterà una impresa ben difficile da affrontare quella di caratterizzare il suo linguaggio, cioè l'insieme delle espressioni con cui di questi contenuti si dovrebbe predicare.

La situazione problematica e apparentemente contraddittoria che abbiamo delineato non è un gioco intellettuale, frutto di una mania rigorista e massimalista di qualche studioso avulso dalla realtà e immerso solo nel suo mondo astratto, fatto di sillogismi e astrazioni. Ciò a cui abbiamo accennato è niente altro che il punto di partenza, un poco stilizzato e romanzato, di quella crisi dei fondamenti della matematica, che, risolta, ha portato al concetto moderno non solo di matematica, ma, più in generale, di scienza.

La crisi dei fondamenti della matematica, iniziata storicamente con la scoperta delle geometrie non euclidee da parte di Bolyai e Lobačevskij all'inizio del secolo scorso, ha coinvolto via via tutti i rami della matematica: dopo la crisi dei fondamenti della geometria è stata la volta dei fondamenti dell'aritmetica, con Kronecker prima e poi Peano, poi dei fondamenti razionalizzati e formalizzati della teoria degli insiemi e, infine, delle basi logiche stesse su cui la matematica è costruita, con la nascita della logica formale. Ciò che vi è di comune in tutte queste crisi, e nel modo con il quale sono state superate, è l'aver avviato e maturato l'evoluzione della matematica da scienza di contenuti a scienza di strutture.

Il famoso problema del V postulato di Euclide, sul quale i matematici hanno lavorato per 20 secoli, nasceva dalla domanda se il suo enunciato doveva ritenersi abbastanza evidente, oppure doveva essere dedotto da un'altra proposizione più elementare. Per 20 secoli non si è avuto alcun dubbio che l'esistenza di una e una sola parallela ad una retta assegnata, passante per un dato punto, corrispondesse alla *realtà* esistenziale: era *evidente* che fosse così. Il problema era solamente quello di esprimere questa *verità* nel modo più adeguato. La rivoluzione portata dalla scoperta delle geometrie non euclidee è consistita nello sperimentare in modo costruttivo che era possibile costruire edifici logici ineccepibili, sia basandosi sull'assunto dell'unicità della parallela, sia basandosi al contrario su una delle possibili negazioni di tale ipotesi. Veniva meno in questo modo la coincidenza tra i concetti di verità ed evidenza; il ricorso alla realtà esterna, o almeno a come essa ci appare usualmente evidente nella nostra intuizione, non poteva più essere considerato criterio di verità. La soluzione è stata allora trovata nel costruire la geometria come un sistema ipotetico-deduttivo, le cui basi erano costituite dagli assiomi e i cui oggetti erano semplicemente i termini primitivi definiti implicitamente dagli assiomi scelti. Da questo punto di vista l'unico criterio di *verità* diventa allora la *non-contraddittorietà* del sistema di assiomi scelto come fondamento della teoria.

Non diversa è l'avventura dell'aritmetica. Il concetto di numero intero, basilare per la costruzione di tutti gli altri insiemi numerici, era stato, fino alla metà del secolo scorso, dato come intuitivo. Quando si è cercato di definirlo in modo preciso ci si è accorti che vi erano solo due possibilità. Una era quella di definirlo (non diversamente dalle nozioni geometriche) in modo implicito, attraverso un opportuno sistema di assiomi. Si trattava, cioè, non di dire cos'è un numero intero, ma di affermare che si può chiamare numero intero un qualunque oggetto che si comporta secondo determinate regole (gli assiomi, appunto). Il sistema di assiomi che definisce per questa via gli *interi naturali* è dovuto a G. Peano (1858-1932). L'altra via percorribile era quella di cercare di definire i numeri a partire da altre nozioni ritenute più *primordiali*, come ad esempio la *nozione di insieme*. Anche questo tentativo non ha mancato però di riservare le sue sorprese. L'idea iniziale più spontanea è stata quella di assumere la nozione di insieme come intuitiva, quasi come se fosse proposta dall'esperienza di una realtà oggettiva; è questa la cosiddetta *teoria ingenua degli insiemi*, che si può fare risalire a G. Cantor (1874). F. L. G. Frege ha tentato, basandosi sulla nozione di equipotenza tra insiemi, di costruire il concetto di numero intero naturale, ma è finito in tal modo in un trabocchetto molto ben nascosto: l'ammissione implicita dell'esistenza di un insieme mostruoso e contraddittorio, l'*insieme di tutti gli insiemi*. Si deve a B. Russell l'aver messo in evidenza questo vicolo cieco, in cui, una volta ancora, la fiducia nell'evidenza di una realtà esterna come criterio di verità, aveva portato il pensiero matematico. Che fare allora? Anche la teoria degli insiemi andava fondata su un complesso di assiomi, doveva cioè diventare un sistema ipotetico-deduttivo, per poter essere attendibile. E anche la nozione, pur così spontanea, di insieme, non poteva che essere definita implicitamente attraverso gli assiomi basilari della teoria. Si deve a Zermelo e a Fraenkel la prima strutturazione di una siffatta teoria degli insiemi.

La matematica modernamente intesa si presenta dunque come una dottrina i cui contenuti non sono desunti dalla realtà sensibile e non godono quindi di una loro propria natura, per così dire, *oggettiva*. Gli oggetti di cui la matematica predica sono ridotti a puri termini primitivi a cui è semplicemente richiesto di soddisfare determinate regole di comportamento: tali regole vengono dette appunto *gli assiomi* della teoria. Sul complesso di questi assiomi esiste un solo vincolo: la non-contraddittorietà, e questo è l'unico criterio di verità che abbia senso porre all'interno dell'edificio matematico.

La teoria matematica si sviluppa poi deducendo, passo dopo passo, conseguenze logiche derivate dagli assiomi fondamentali, cioè dalle regole formali, dalle operazioni che è lecito compiere tra i termini primitivi. Accade così che il vero contenuto della matematica non risultano più i suoi termini primitivi (cioè gli enti geometrici come i punti, le rette, le figure, oppure i numeri naturali, oppure gli insiemi, e così via), ma le regole con cui si opera su essi. La matematica assume così l'aspetto di una scienza che è caratterizzata dalle procedure piuttosto che da certi oggetti studiati in sè e qualificanti come tali la dottrina. La matematica si presenta in definitiva come una specie di linguaggio, convenzionale e dalle regole sintattiche rigorosissime.

La matematica come linguaggio

Questa fisionomia della matematica, intesa come linguaggio, pone rilevanti problemi didattici per tutte le classi di età. Ne esaminiamo qui di seguito alcuni.

a) Osserviamo prima di tutto che, da questa impostazione, nasce naturale una tentazione, alla quale, in verità, alcune moderne correnti di ricerca didattica hanno ceduto. Si argomenta: «se la matematica è un linguaggio basato su poche nozioni astratte e generalissime, la via didattica più diretta non può che essere quella di presentare subito ai discenti queste idee generali e logicamente semplici, deducendo poi da esse come casi particolari tutti gli aspetti più concreti della disciplina». Questa impostazione è stata particolarmente approfondita per quanto riguarda l'insegnamento della geometria, che si è voluto da certi autori (si pensi per esempio ad un Dieudonné) derivare completamente, come semplice caso particolare, da determinate strutture algebriche molto generali, come quelle di *gruppo* e di *spazio vettoriale*. Questa idea di privilegiare l'algebra rispetto alla geometria è dovuta forse al fatto che la prima confina con la logica formale e può dare, quindi, una particolare sensazione di rigore del ragionamento deduttivo; rigore che poteva sembrare sconosciuto ai vecchi procedimenti di ragionamento e che probabilmente è alla base dell'attuale fortuna dell'algebra cosiddetta *moderna*.

Si finisce in questo modo con il presentare delle strutture formali, per così dire, come *vuote*, che risultano poi via via da riempire con esempi e con casi concreti. Chi scrive ritiene che procedimenti di questo genere, anche se possono essere di fatto memorizzati dagli allievi, non abbiano in sè effettivi contenuti formativi. I procedimenti di apprendimento della mente umana vanno, in generale, dal concreto all'astratto, dal particolare al generale, dalla esperienza alla sua idealizzazione e formalizzazione. Di conseguenza, se si vuole arrivare a dare ai nostri allievi il gusto del ragionamento formale e astratto, che è proprio della matematica, se si vuole fare loro capire l'utilità e quasi la necessità dello strumentario della matematica modernamente intesa, occorre partire, almeno inizialmente, da elementi concreti desunti dall'esperienza della realtà esterna, per arrivare poi ad una adeguata formalizzazione attraverso un appropriato itinerario di astrazione, generalizzazione e idealizzazione.

Possiamo quindi concludere che *l'aspetto più profondo della matematica moderna non può essere semplicemente comunicato,* come una informazione tra tante altre, ma *deve necessariamente essere oggetto di conquista personale.* Ogni discente dovrà sperimentare nella propria mente l'evoluzione del pensiero matematico dal concreto all'astratto, dai contenuti alle strutture formali. Solo in questo modo potrà alla fine arrivare ad una effettiva *appropriazione* di questo linguaggio universale, disponibile per la descrizione di tutti gli aspetti della realtà, anche di quelli più inaspettati e sconcertanti.

b) Chiediamoci ora quale potrebbe essere una adeguata strategia didattica finalizzata all'insegnamento della matematica intesa come linguaggio.

Una prima osservazione è che un linguaggio, ogni linguaggio, viene appreso con relativa facilità se parla «di qualche cosa». Non avrebbe senso conoscere tutte le regole grammaticali e sintattiche di una lingua se poi non si fosse in grado di usarle per esprimere dei concetti o per descrivere qualche realtà. Allo stesso modo non si può dire di possedere la matematica, o un ramo di essa, se solo si conoscono in astratto alcuni suoi concetti e alcune regole operatorie. Si può dire di «fare matematica» solo se la si usa, se si è in grado di farla servire o di farla operare esattamente come un linguaggio che esprime determinati giudizi intorno a «qualche cosa». In conclusione si fa della matematica se si hanno dei formalismi (non importa se elementari o concettualmente avanzati, ma formalismi!) che soddisfano certe regole di comportamento e se si è capaci di operare, con questi formalismi, su determinati dati per ottenerne degli altri. In una parola: *si sta facendo della matematica solo se si è in grado di risolvere dei problemi.*

Una seconda osservazione riguarda la categoria conoscitiva propria, relativa all'apprendimento di un linguaggio. Studiare una lingua non significa accumulare informazioni su di essa, ma operare invece un processo di *appropriazione* di questo mezzo di comunicazione, facendo proprie via via le idee, i formalismi, i metodi che lo caratterizzano. In sintesi: si può parlare di appropriazioni del linguaggio matematico da parte del discente se egli raggiunge uno stato interiore nel quale gli strumenti concettuali e formali della matematica sono diventati una specie di scoperta personale, tali da essere usati spontaneamente e in modo quasi automatico. Pensiamo, come esempio, all'uso degli strumenti dell'aritmetica nella vita quotidiana. Questo uso non ci richiede riflessione perché per noi è diventato quasi automatico il procedimento di simbolizzare certi numeri con cifre e di operare poi su tali simboli secondo le regole formali a suo tempo

Nicola Lobačevskij

Giorgio Cantor

memorizzate. È abbastanza pacifico osservare che a questo livello di appropriazione non si arriverà facilmente con l'imporre le strutture formali già costruite ed astratte dalla realtà che inizialmente le ha suggerite. Al contrario, occorrerà rendere coscienti gli alunni dei procedimenti logici che vengono adottati nell'uso pratico dello strumento matematico e, inoltre, occorrerà avviarli alla ricerca dei fondamenti (logici e formali) da cui un certo comportamento discende.

In conclusione abbiamo messo in evidenza due aspetti essenziali nell'apprendimento del linguaggio matematico. Il primo è la necessità di un *addestramento* di base che renda padroni di quegli automatismi che possono far diventare spedito e sicuro il ragionamento (pensiamo, ad esempio, alle famose «tabelline» tanto disprezzate in un passato ancora prossimo, ma ora riportate nella loro giusta posizione strumentale). Il secondo è la *formazione di una mentalità,* un modo tale che il ragionamento matematico diventi naturale e spontaneo.

c) Se in precedenza abbiamo esaminato le implicazioni didattiche derivanti dalla analogia esistente tra la matematica, intesa come *linguaggio formale,* e il linguaggio ordinario, o *linguaggio verbale,* è opportuno ora sottolineare anche una profonda differenza esistente tra questi due modi di linguaggio. L'analisi di questa differenza ci permetterà anche di mettere in evidenza uno dei costituenti essenziali del valore formativo della matematica.

È facile osservazione notare come la lingua naturale possieda un elevato grado di ridondanza. Ciò significa che nel linguaggio ordinario le frasi che noi usiamo per esprimere un determinato concetto contengono sempre molte più parole di quelle strettamente necessarie per individuare univocamente ciò che vogliamo comunicare.

Vengono di qui due conseguenze: da una parte è possibile esprimere gli stessi concetti anche con frasi molto diverse, dall'altra anche delle cospicue deformazioni di una frase (deformazioni ottenute, per esempio, saltando delle parole, oppure usandole con significati errati, oppure ancora violando un certo numero di regole grammaticali e sintattiche) non è detto che alterino in modo essenziale il messaggio che si vuole trasmettere. In altre parole potremmo dire: si può parlare male, sgrammaticato, con un lessico anche molto povero, ma si riesce in qualche modo a farsi capire. La ridondanza di cui parlavamo è in parte legata, e quasi resa necessaria, dalla naturale imprecisione del linguaggio verbale ordinario. Infatti si cerca di compensare l'eventuale ambiguità di espressioni o imprecisione di termini ripetendo più volte lo stesso messaggio (o suoi equivalenti) al fine di ottenere come risultato una individuazione univoca del concetto che si vuole trasmettere, senza possibilità di confonderlo con altri, espressi in modo analogo, ma di contenuto differente. La ridondanza della lingua naturale è, però, anche espressione di ricchezza, derivante dal fatto che con l'espressione verbale si comunicano non solo concetti o stati di fatto, ma anche informazioni di carattere meno circoscrivibile, come sensazioni, stati d'animo, ecc.

Nel caso della matematica, invece, accade che ogni errore, anche minimo, sia nella espressione formale del linguaggio che nella sua interpretazione, rende inutile il messaggio oppure trasmette delle informazioni incomprensibili o sbagliate. Questo fatto comporta delle profonde conseguenze. Da una parte possiamo trovare qui una spiegazione del fatto che molte intelligenze, anche vive e brillanti, trovano nella matematica delle difficoltà quasi insormontabili. Si tratta forse di intelligenze che mal sopportano la convenzionalità e l'assoluta rigidità della grammatica e della sintassi del linguaggio matematico. Persone, quindi, che affermano di «non aver mai capito nulla della matematica» sono forse semplicemente allergiche alle convenzioni formali e si sentono come soffocare da regole espressive troppo rigide.

Da un'altra parte, però, possiamo anche osservare che questo aspetto della matematica, che la rende per molti difficile, contiene anche uno dei costituenti più profondi e significativi del suo valore formativo. Infatti l'impiego di una lingua estremamente precisa richiede necessariamente una grande chiarezza di idee o di espressione. L'insegnamento della matematica, quindi, presenta un significativo valore formativo, se utilizzato come potenziale correttivo delle idee confuse e delle espressioni equivoche, di cui la nostra quotidiana esperienza è piena.

Abbiamo toccato in questo modo un aspetto molto importante e molto delicato della matematica: parliamo di ciò che viene solitamente indicato con il termine *rigore.* Questo punto merita un momento di riflessione per sgomberare il campo da fraintendimenti e incomprensioni divenute quasi tradizionali. È abbastanza facile che nell'opinione comune la parola *rigore* venga confusa e quasi considerata sinonimo di altri termini come pedanteria, meticolosità fine a se stessa ecc., termini che indicano atteggiamenti mentali solitamente non positivi e costruttivi. Può anche accadere che nell'ambito del linguaggio verbale ordinario questa identificazione abbia la sua buona giustificazione. Certamente, però, nell'ambito del linguaggio formale della matematica, quando si parla di *rigore* si intende tutt'altro. Per chiarire subito le cose potremmo ricordare la bellissima e lapidaria definizione che Peano dà di rigore, in matematica: «Il rigore matematico è molto semplice: esso sta nell'affermare tutte cose vere e nel non affermare cose che sappiamo non vere» [G. Peano, *Sui fondamenti dell'analisi,* Bollettino della Società «Mathesis», II (1910), 31-37]. Possiamo allora concludere, da questo, che il rigore non deve essere ritenuto come una questione di specialisti, di professionisti della matematica che, si potrebbe pensare con un poco di cattiveria, «devono darsi un tono». Siamo profondamente convinti che ogni seria attività di matematizzazione, a qualsiasi livello sia compiuta, ha un suo grado di rigore che deve essere rispettato, per poter onestamente parlare di matematica. Esiste, in altre parole, un rigore (matematico) per ogni età, e sarà compito non banale della ricerca nell'ambito della didattica della matematica, individuare questi livelli di rigore che rispettino, da una parte, le dinamiche dell'apprendimento e, dall'altra, la matematica stessa.

L'esempio dell'aritmetica

Ci proponiamo ora di delineare il nascere e i primi sviluppi del linguaggio formale matematico in un caso, per così dire, emblematico: quello dell'aritmetica. Aritmetica e geometria sono un po' le colonne portanti della matematica, almeno nei suoi aspetti elementari e «fondazionali», ed è naturale che si presentino, dunque, come i primi e più naturali ambiti di alfabetizzazione matematica.

L'idea di numero naturale, nei suoi aspetti cardinale e ordinale, nasce poggiandosi sul concetto ancora confuso e approssimativo, rispettivamente, di insieme (finito) e di allineamento (cioè di insieme dotato di un ordinamento totale). Nel primo caso, poggiando su una intuizione non formalizzata, ma ottenuta generalizzando solo pochi casi di esperienze concrete, si può giungere al concetto di corrispondenza biunivoca tra insiemi e di qui a quello di numero cardinale (pensato come astratto dalle classi degli insiemi finiti che si possono mettere appunto in corrispondenza biunivoca tra loro). Abbiamo già visto come questa impostazione non regga di fronte ad una accurata critica razionale, tuttavia essa è così spontanea e «naturale» da essere certamente accettabile e, anzi, consigliabile come primo approccio elementare al concetto di numero cardinale. Al concetto di numero ordinale si può arrivare invece poggiando su operazioni elementari di confronto tra insiemi di diversa cardinalità, oppure anche sull'intuizione, anch'essa del tutto naturale benché assolutamente informe, di ordinamento lineare o allineamento.

Assieme al primo momento di costruzione del concetto di numero troviamo poi anche il primo momento espressivo nel quale vengono dati gli strumenti verbali e grafici per rappresentare i numeri. Questo insegnamento fa parte della prima alfabetizzazione, sia linguistica sia matematica. È importante, però, osservare che i due momenti dianzi considerati, della costruzione del concetto e della sua espressione, pur essendo quasi contemporanei, non sono tuttavia da confondersi. È possibile infatti riconoscere se due insiemi hanno la stessa quantità di elementi (lo stesso *numero di elementi,* diciamo abitualmente) senza nè conoscere i numeri nè saperli esprimere verbalmente o simbolicamente.

Fino a questo punto l'apprendimento della numerazione non presenta sostanziali differenze dall'apprendimento dei vocaboli della lingua materna, che aiutano il bambino nella concettualizzazione, cioè nella costruzione di concetti generali che fondano un principio di classificazione delle cose che lo circondano. Il linguaggio verbale non differisce, dunque, ancora sostanzialmente dal linguaggio formale. Anche l'introduzione della scrittura dei numeri, fino a questo punto, va di pari passo con l'apprendimento della scrittura dei simboli linguistici, perché il bambino impara a tracciare certi simboli grafici che per lui sono analoghi alle lettere dell'alfabeto e che rappresentano i primi numeri naturali.

La diversificazione tra i due linguaggi, quello verbale e quello formale, comincia però subito appena ci si trova a dover scrivere numeri «abbastanza grandi». Infatti, mentre per scrivere numeri naturali minori di nove abbiamo a disposizione diversi simboli distinti, non disponiamo di altri simboli speciali per rappresentare i numeri maggiori di nove: tali numeri naturali li rappresentiamo invece con la ben nota *scrittura posizionale,* utilizzando come simboli grafici fondamentali le cifre da 0 a 9.

È vero che nelle lingue europee un fenomeno analogo si presenta anche per la rappresentazione delle parole; non si possiede, infatti, un simbolo speciale per ogni vocabolo, ma, al contrario, ogni parola è ottenuta dalla diversa giustapposizione di diversi simboli: le lettere dell'alfabeto. Vi è però una diversità sostanziale tra la scrittura posizionale dei numeri naturali, ottenuta mediante le cifre da 0 a 9, e la scrittura alfabetica dei vocaboli della lingua corrente e sta nell'uso che di queste diverse scritture si può fare. La scrittura alfabetica delle parole è infatti fine a se stessa e potrebbe in ogni momento essere sostituita con opportuni ideogrammi; la scrittura posizionale dei numeri, al contrario, si rivela preziosa quando si comincia a stabilire relazioni tra di essi, mediante le cosiddette *operazioni.* Ecco, allora, che da questo punto di vista si rivela estremamente educativo confrontare come si possano eseguire delle semplici operazioni, per esempio di somma oppure prodotto, tra numeri rappresentati con scrittura posizionale (per esempio in base dieci), oppure tra i numeri rappresentati da particolari ideogrammi, come ad esempio i simboli della numerazione romana. La differenza tra il linguaggio formale e quello verbale comincia a mostrarsi quando si inizia ad usare i formalismi. Ecco dunque un primo esempio concreto di cosa significa l'affermazione che «si fa» della matematica solo quando la si usa per dire qualcosa, cioè per risolvere dei problemi.

Considerazioni analoghe si possono fare anche a proposito delle numerazioni in basi diverse dal dieci. Il passaggio dalla scrittura di un dato numero in base dieci, alla scrittura dello stesso numero in un'altra base (2 oppure 60...!) può apparire a prima vista come una semplice *traslitterazione* analoga a quella che si opera scrivendo, ad esempio, in caratteri latini un cognome la cui scrittura originale è in caratteri cirillici, oppure greci. Anche in questo caso, tuttavia, il divario tra il linguaggio formale e quello verbale si evidenzia subito appena ci si rende conto che, nel caso della matematica, il passaggio da una base ad un'altra è sottoposto a ben precise leggi con determinate proprietà invarianti (per esempio le regole per compiere le operazioni), mentre la traslitterazione linguistica si limita a null'altro che un puro cambio di simboli grafici.

La piena portata del linguaggio formale in cui la matematica consiste, si può apprezzare quando si comincia ad operare sui numeri mediante l'applicazione delle leggi di confronto e di composizione (le ben note «operazioni»: la somma, il prodotto e le altre da loro derivate, sottrazione e divisione). Queste operazioni possono essere suggerite da esperienze abbastanza naturali, come ad esempio la riunione di due insiemi finiti, oppure la costruzione, a partire da due insiemi, di un nuovo insieme detto prodotto cartesiano dei primi due. Queste manipolazioni godono di proprietà molto spontanee, come ad esempio la *commutatività* della riunione di due insiemi oppure la *associatività* della stessa riunione, quando si operi con più di due insiemi. Ciò che è interessante è la traduzione di queste operazioni e proprietà logiche in simboli e proprietà formali tra i simboli. In questo modo si arriva al risultato di far funzionare i simboli in base alle loro leggi intrinseche, dimenticandosi dei modelli di insiemi finiti, manipolando i quali ci è sorta l'idea del formalismo matematico.

Si mette nuovamente in evidenza, in questo modo, quell'aspetto peculiare della matematica che l'ha fatta diventare il linguaggio universale di tutte le scienze e si verifica anche, da questo punto di vista, che non può essere ritenuto come *contenuto* della matematica quell'insieme di esperienze e manipolazioni che pure ne ha suggerito i primi passi. Infatti, grazie a questa capacità dei simboli di «funzionare da soli», indipendentemente da ciò che rappresentano, il linguaggio matematico può applicarsi alle più svariate situazioni, solo che si adattino alle condizioni di base (assiomi) a cui i simboli devono soddisfare. La matematica si presenta, allora, come una sorta di «logica» che permette di estrapolare e prevedere risultati aventi valori generali, di portata ben più ampia del modesto ambito di esperienze dalle quali il formalismo è stato suggerito.

Da un punto di vista didattico riteniamo perciò estremamente istruttivo sottolineare le proprietà formali che rendono possibili o lecite le operazioni tra numeri, facendo in modo che l'uso di queste proprietà da una parte diventi naturale e quasi automatico, ma dall'altra non appaia mai ovvio e scontato. A questo fine potrà essere utile ideare molteplici situazioni atte a mettere in crisi una esecuzione ripetitiva e acritica di regole di calcolo assegnate. Per esemplificare si può suggerire l'esecuzione di operazioni, mediante l'uso di macchinette da calcolo tascabili, tra numeri aventi più cifre di quante il calcolatore è in grado di elaborare. Altro istruttivo esempio viene dall'operazione di divisione tra numeri interi; infatti con questo unico nome si indicano due procedimenti concettualmente ben diversi: uno, la divisione (senza resto), che è l'operazione inversa del prodotto, l'altro, la divisione con resto, che è effettivamente una nuova operazione, definita non solo a partire dalla moltiplicazione, ma anche dalla somma, e basata inoltre anche sulle proprietà di ordinamento degli interi.

Successive esperienze possono portare ad ampliare l'intuizione primordiale di numero naturale. Si pensi, ad esempio, ai numeri negativi, di cui è facile immaginare la genesi, per esempio, attraverso la lettura di un termometro oppure nella esecuzione di un bilancio di «dare e avere». Analogamente si può pensare alle frazioni, intese come operatori, che si propongono spontaneamente appena si tratta di suddividere in parti uguali una qualsiasi grandezza. In modo non diverso da quanto si è visto per i numeri naturali, anche i primi passi di alfabetizzazione in questa direzione sono sostanzialmente di natura lessicale e i relativi concetti appartengono al ragionamento comune. Appena però si traducono in simboli anche queste nozioni, l'aspetto peculiare del linguaggio formale si rivela con ancora maggiore evidenza.

La rigidità delle regole che dominano il linguaggio formale matematico ha come conseguenza che l'estensione ai nuovi numeri delle vecchie operazioni già note per gli interi naturali, non può farsi in modo grossolano ed intuitivo, ma richiede, al contrario, una attenta strategia concettuale. In tal modo, ad esempio, per poter estendere le operazioni di somma e prodotto ai numeri interi negativi occorre costruire (necessariamente in modo astratto, formale, assiomatico) un nuovo insieme di enti, i *numeri interi relativi*, di cui un opportuno sottoinsieme (quello degli *interi positivi*) è isomorfo all'insieme dei *numeri naturali*. L'estensione delle stesse operazioni di somma e prodotto alle frazioni richiede poi ancora molto di più. Infatti una somma e prodotto di frazioni, definite in modo ingenuo, non riuscirebbe a soddisfare tutte le proprietà formali che abbiamo riconosciuto utili e significative per queste operazioni. Tali proprietà si possono salvare solo se le operazioni vengono definite non tra le singole frazioni, ma tra personaggi molto più complessi: le classi di frazioni equivalenti. Si è portati, in tal modo, alla costruzione di un nuovo insieme di oggetti, decisamente astratti e sfuggenti per l'intuizione più elementare: l'insieme dei *numeri razionali*.

Si potrebbe proseguire questa analisi prendendo ora in considerazione l'esperienza quotidiana che abbiamo della *continuità* ed esaminare come questa ci potrebbe condurre alla costruzione dell'insieme dei *numeri reali*. Ci limiteremo invece, per brevità, alle sole considerazioni sopra esposte, concludendole, tuttavia, con una osservazione fondamentale.

Abbiamo descritto alcuni momenti di un itinerario di alfabetizzazione aritmetica che va dagli interi naturali ai numeri razionali. Abbiamo visto in tal modo apparire insiemi numerici sempre più vasti, in cui le proprietà formali delle operazioni tra i numeri erano, per così dire, condizionate dalla natura dei numeri stessi. Possiamo parlare, in sostanza, di una visione oggettiva dell'aritmetica. Se si volesse però ulteriormente approfondire lo studio di questi enti che abbiamo chiamato numeri, e delle loro proprietà, saremmo portati ad addentrarci nella così detta *algebra moderna* o *algebra astratta*. In questo ramo così caratteristico della matematica del nostro tempo, il punto di vista che poc'anzi abbiamo chiamato oggettivo è totalmente capovolto. Nell'algebra astratta sono le proprietà delle operazioni, definite sugli elementi di un insieme astratto qualsiasi, che *caratterizzano questi enti*, anzi, meglio, che caratterizzano il loro insieme. Da questo punto di vista, allora, non ha senso dire che un certo ente, preso a sè stante, è un numero, ma ha senso solo dire che *un certo insieme di enti ha una struttura di insieme numerico*, insieme che poi potrà essere di vari tipi: campo, corpo, anello.

Carlo Felice Manara
Mario Marchi